Mathematische Grundlagen für das Praktikum:

Grundwissen:

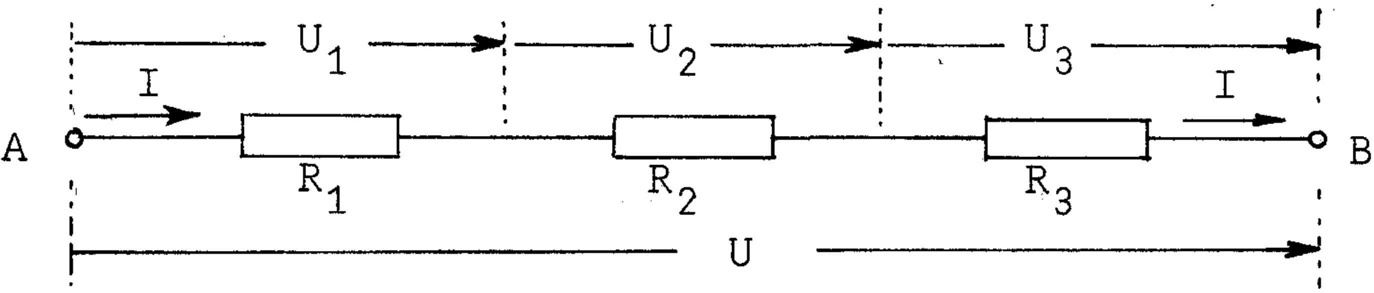
- Bruchrechnung
- Potenzen
- Logarithmen

Funktionen und ihre Darstellungen:

- Lineare Funktionen
  Proportionen
- Exponentialfunktion
- Potenzfunktionen
- Trigonometrische Funktionen

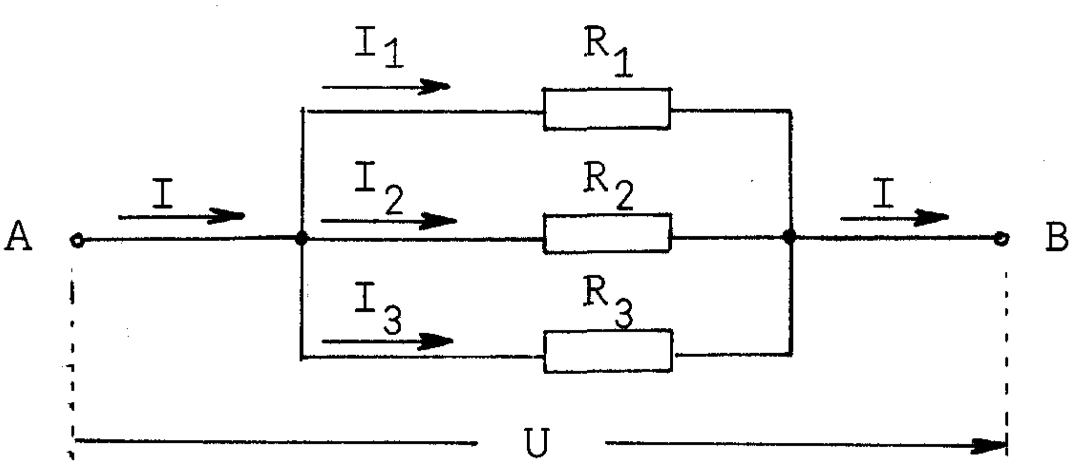
Anwendungsbeispiel:

Serien-Schaltung



$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

Parallel-Schaltung



$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Mathematische Hilfsmittel

Potenzen

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot ,,,(n-\text{mal}) = a^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^0 = 1$$

$$\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{a^0}{a^n} = a^{0-n} = a^{-n}$$

ebenso : gebrochene Hochzahlen

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad \text{bzw.} \quad a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$$

Darstellung mit Zehnerpotenzen:

$732784 = 7{,}32784\ 10^5$

$0{,}000453 = 4{,}53\ 10^{-4}$

Umrechnung der physikalischen Einheiten

Zeit:

$$t = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s} = 5{,}4 \cdot 10^{2}\,\mu\mathrm{s} = 540\,\mu\mathrm{s}$$

Länge etc:

$$1\,\mathrm{mm} = 10^{-3}\,\mathrm{m}$$

$$50\,\mathrm{mm}^4 = 50 \cdot (10^{-3}\,\mathrm{m})^4 = 50 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{m}^4$$

$$1\,\mathrm{l}\,(\mathrm{Liter}) = 1\,\mathrm{dm}^3 = (10^{-1}\,\mathrm{m})^3 = 10^{-3}\,\mathrm{m}^3$$

Konzentration:

$$c = 0{,}020\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}} = 0{,}020\,\frac{\mathrm{mol}}{10^{-3}\,\mathrm{m}^3} = 0{,}020 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{m}^3}$$

Dichte:

$$\rho = 1\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} = \frac{10^{-3}\,\mathrm{kg}}{10^{-6}\,\mathrm{m}^3} = 10^3\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} = 1\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}$$

Logarithmus

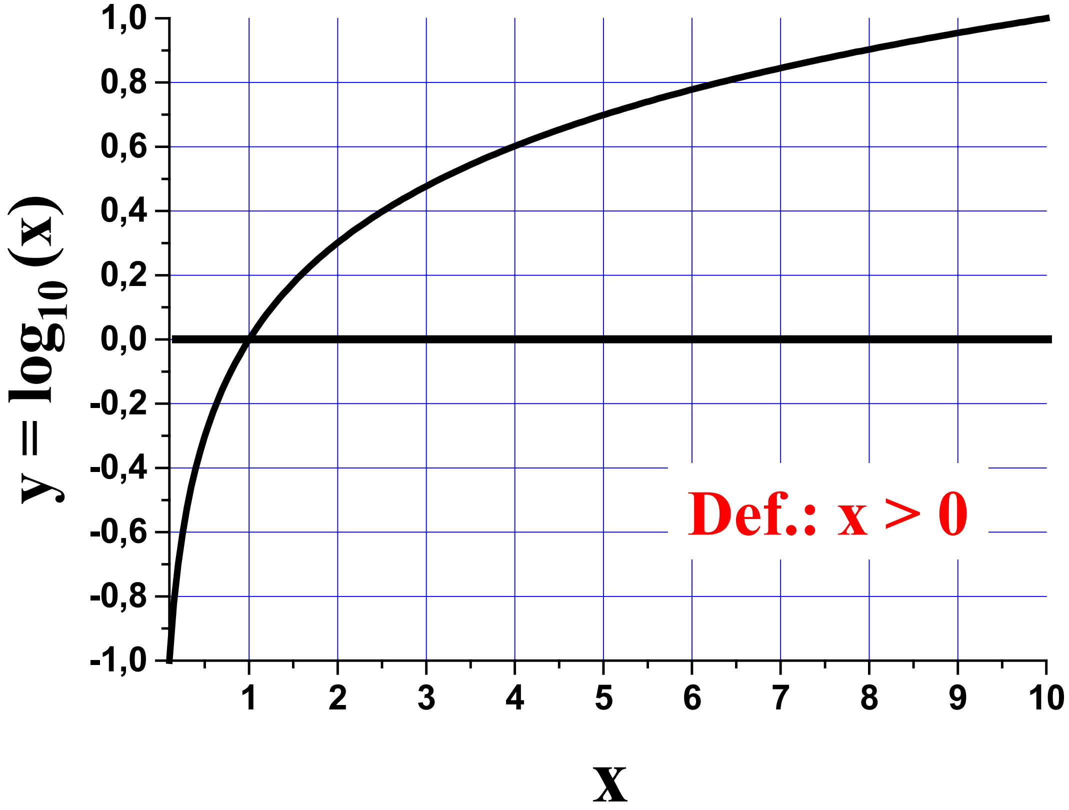
Definition: $y = a^x \Longleftrightarrow x = \log_a y$

Basis: z.B.: 10 , 2, ... e = 2,718...

Dekadischer Logarithmus **log**

dualer Logarithmus

natürlicher Logarithmus **ln**



Beispiele

$$1000 = 10^{x} \qquad x = ?$$

$$x = \log_{10} 1000 = 3$$

$$64 = 2^{x} \qquad x = ?$$

$$x = \log_{2} 64 = 6$$

Logarithmus

aus den Regeln der Rechnung mit Potenzen folgt:

$$\log (A * B) = \log A + \log B$$

$$\log (A / B) = \log A - \log B$$

$$\log (A^B) = B * \log A$$

Mathematische Hilfsmittel

Logarithmus

es gilt: ⇒

$$10^{\log y} = y$$

$$e^{\ln y} = y$$

einige nützliche Beispiele:

$$\log\left(\frac{1}{A}\right) = -\log A \qquad \log\left(\frac{A}{B}\right) = -\log\left(\frac{B}{A}\right)$$

$$\log 2 = 0{,}3010 \qquad \ln 2 \approx 0{,}7$$

$$\log 0{,}001 = \log(10^{-3}) = \log\left(\frac{1}{10^3}\right) = 0 - \log(10^3) = -3$$

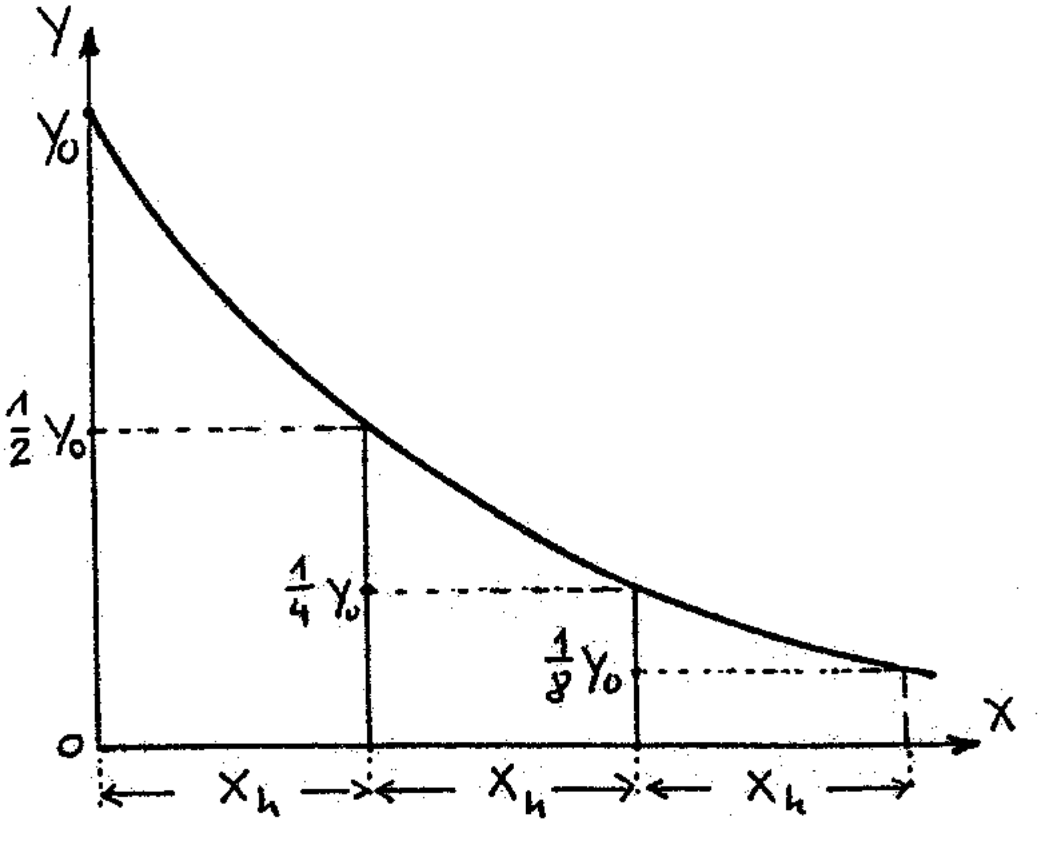
$$\log 8 = \log\left(2^3\right) = 3 \cdot \log(2) \approx 0{,}9$$

$$\log 0{,}5 = \log\left(\frac{1}{2}\right) = 0 - \log(2) \approx -0{,}3$$

e-Funktion $y = e^{ax}$

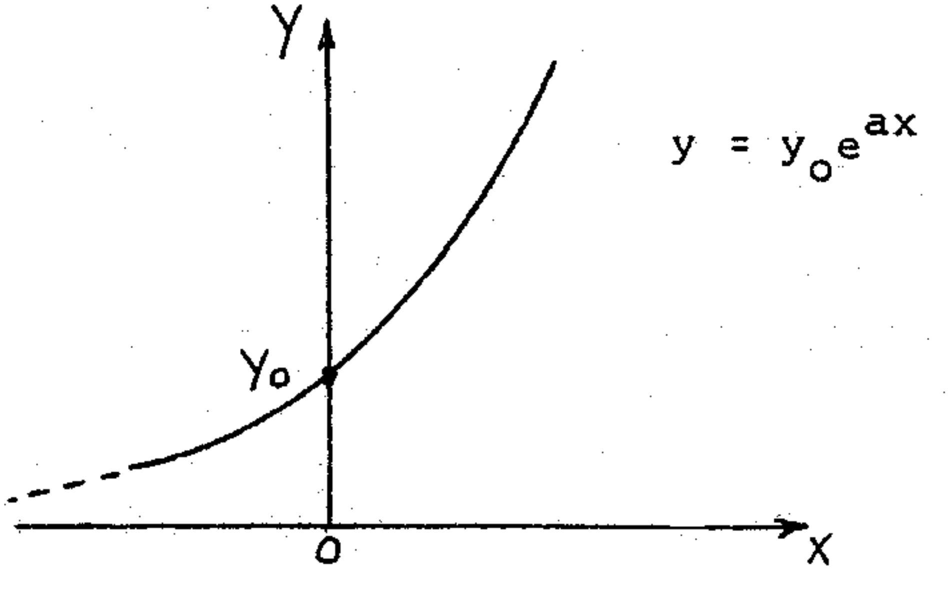
Halbwertsgröße: $y = y_0\, e^{-a\,x}$

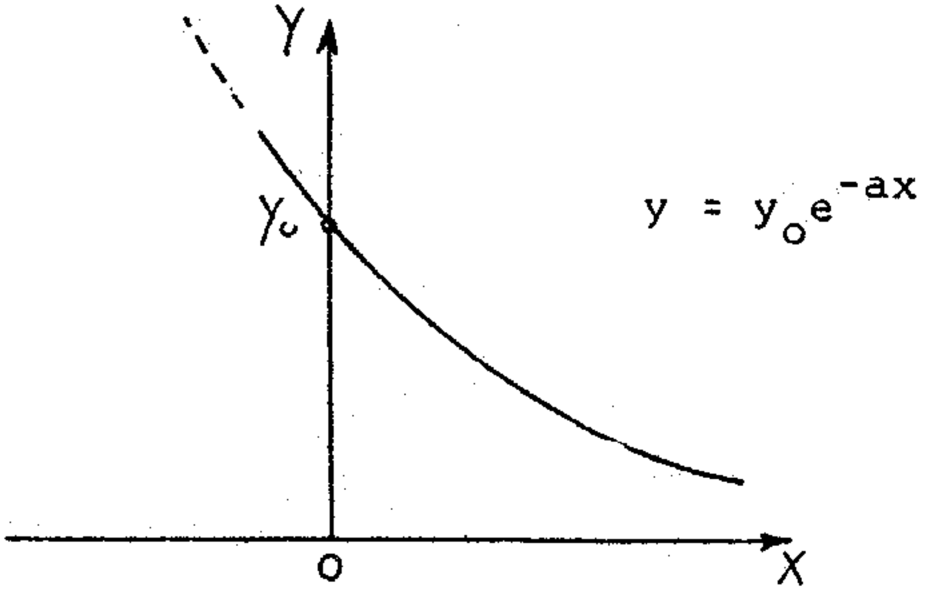
$$\mathbf{y\,(x_h) = y_0 / 2 \;\Rightarrow\; x_h = \ln 2 / a}$$



e-Funktion $y = e^{ax}$

Umkehrfunktion: $y = e^{x}$	**$x = \ln y$**
Ableitung von $y = e^{x}$	**$dy/dx = e^{x}$**
bzw. $y = e^{ax}$	**$dy/dx = a\, e^{ax} = a\, y$**





Logarithmen

Umrechnen auf andere Basiswerte

$$\ln y = \frac{\log y}{\log e} \qquad \log y = \frac{\ln y}{\ln 10}$$

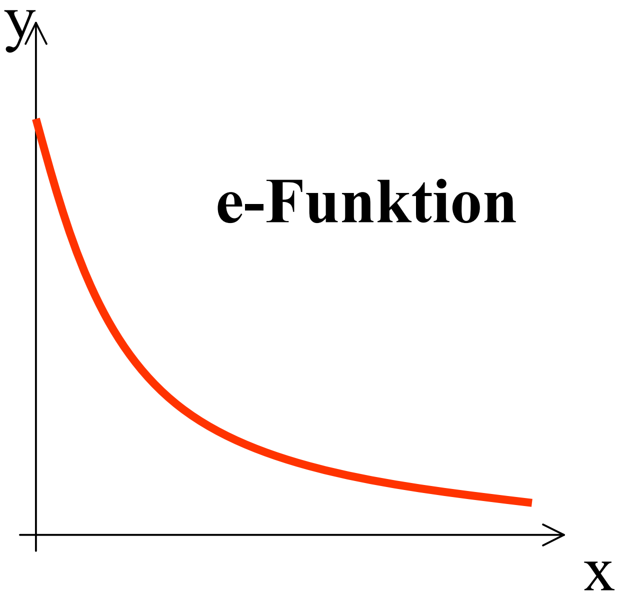
Delogarithmieren

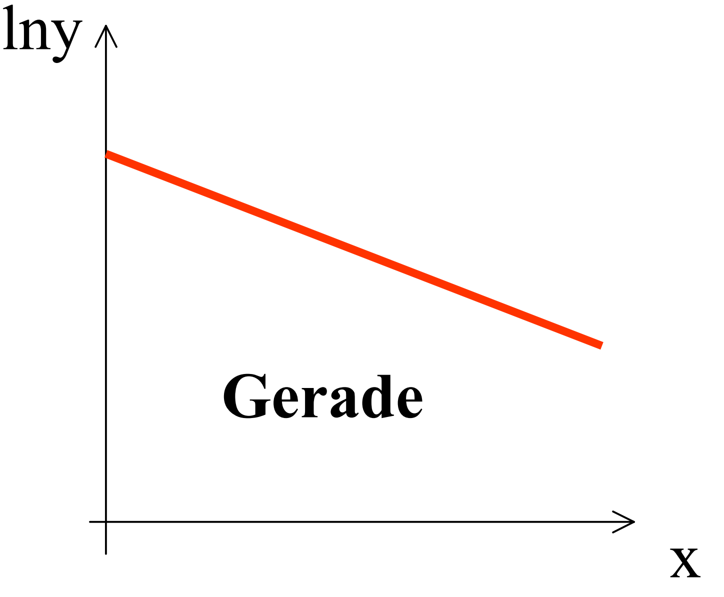
$$b = \log_a y \quad \Rightarrow \quad a^b = y$$

Logarithmieren

$$\mathbf{y = a - \mu x}$$

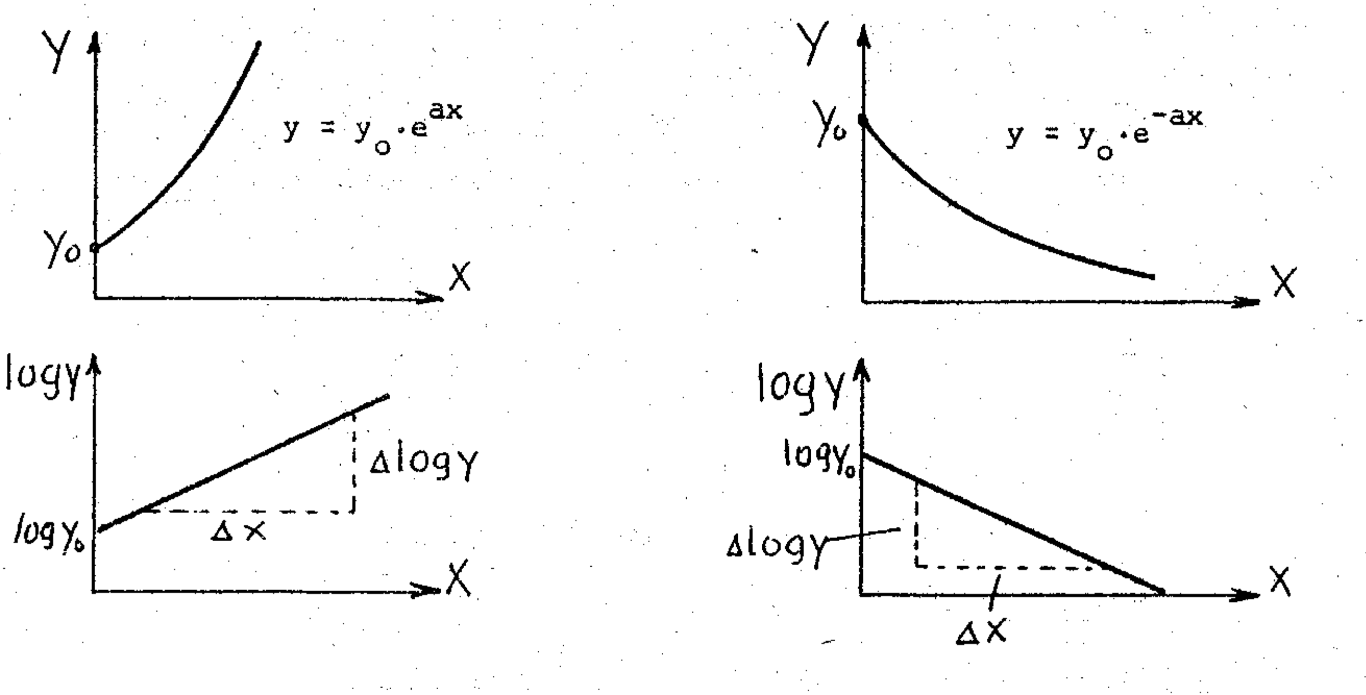
$$N = N_0 e^{-\mu x} \Rightarrow \ln N = \ln N_0 - \mu x$$





Logarithmen

halblogarithmische Darstellung der e-Funktion : ⇨ Gerade

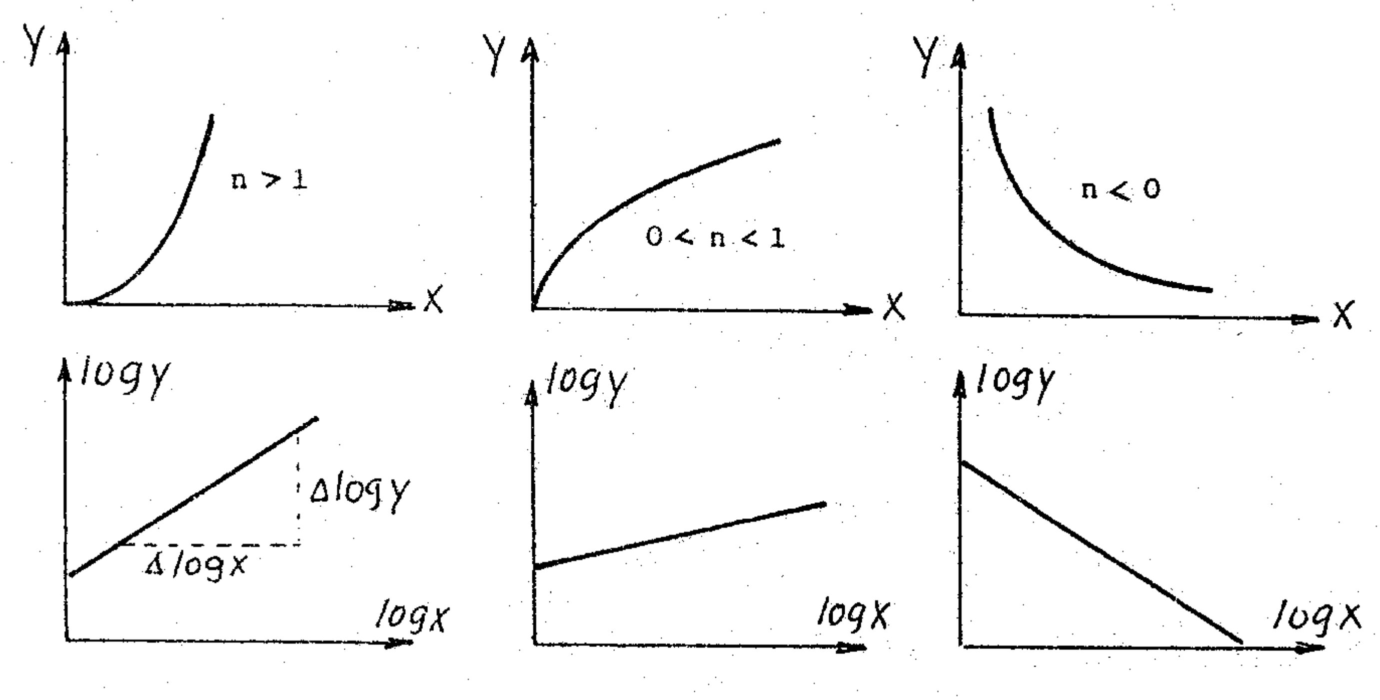


Logarithmen

Entsprechende Darstellung von Potenzfunktionen

$$y = k\,x^n \quad \Rightarrow \quad \log y = \log k + n \log x$$

$$y = a + \mu x$$



Mathematische Hilfsmittel

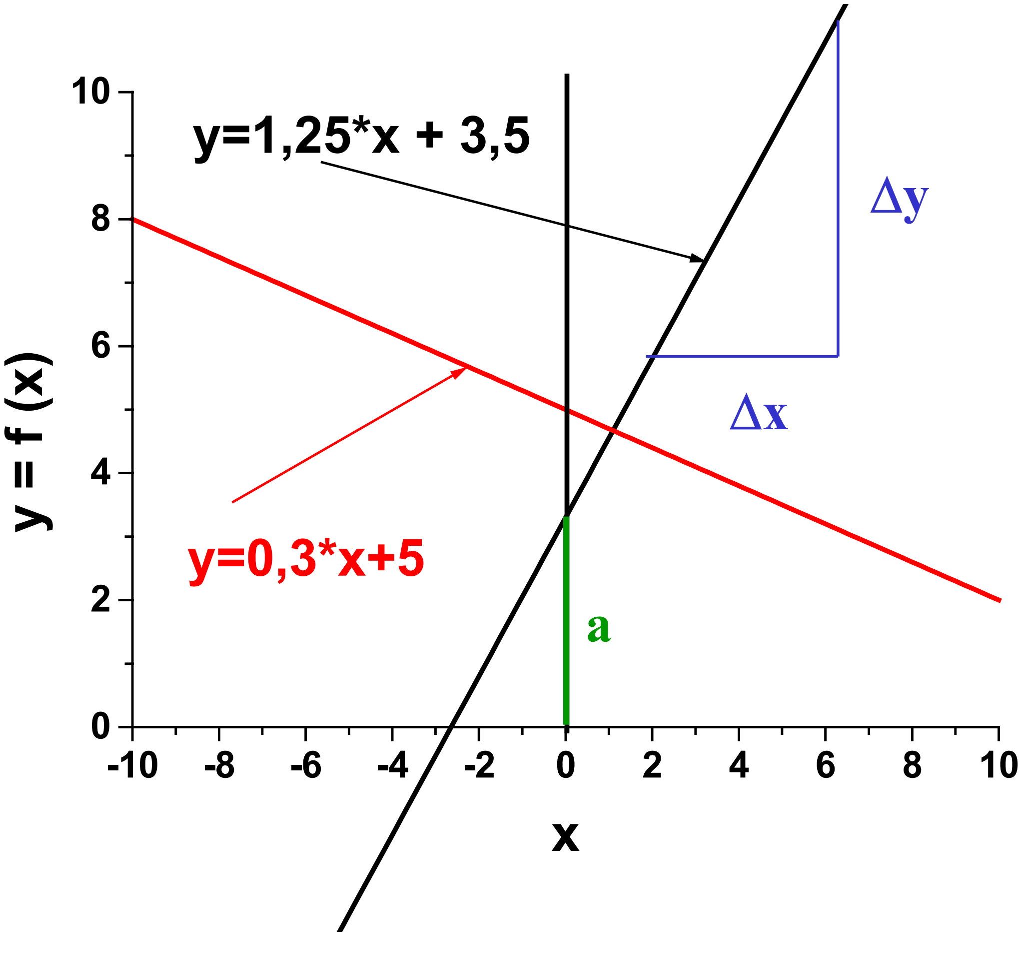
einfache Funktionen: **Gerade**

Funktionsgleichung: $\mathbf{y = f(x) = m * x + a}$

Steigung

Achsenabschnitt

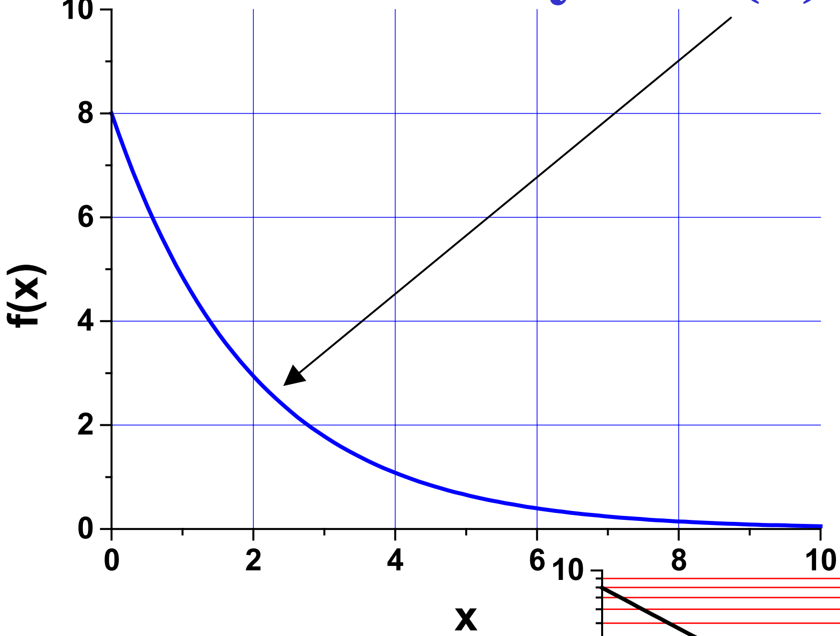
$$Steigung \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

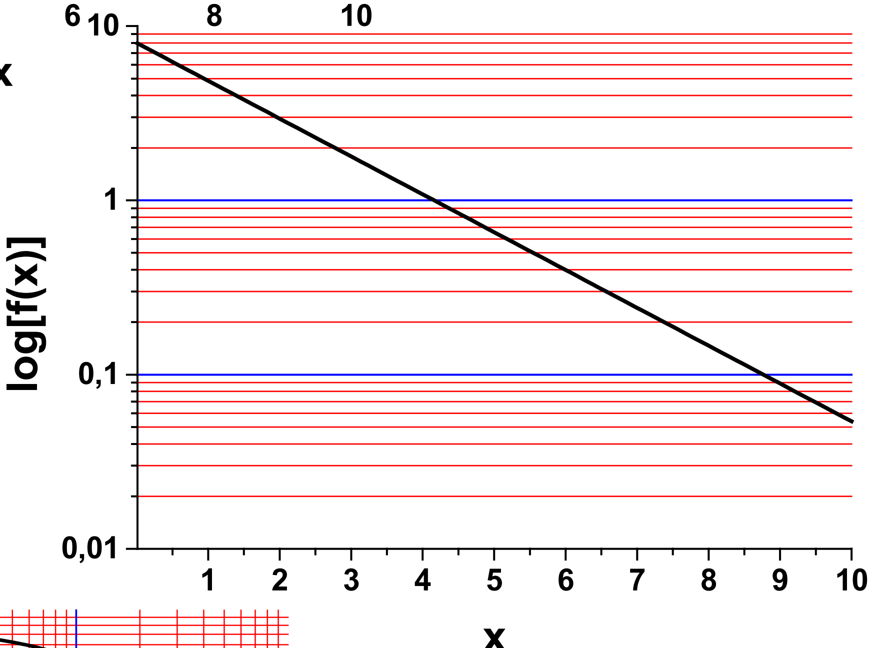


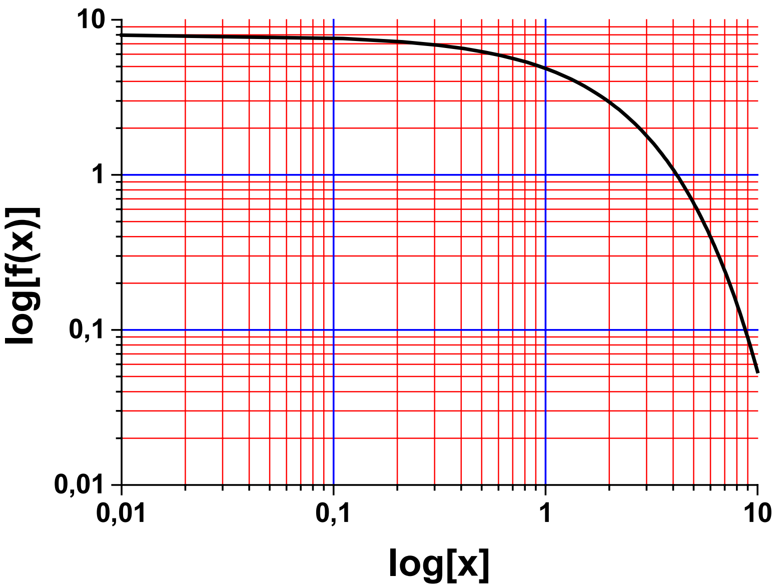
Mathematische Hilfsmittel

Koordinatendarstellungen am Beispiel

der Funktion $y = f(x) = 8 * e^{-0,5\,x}$

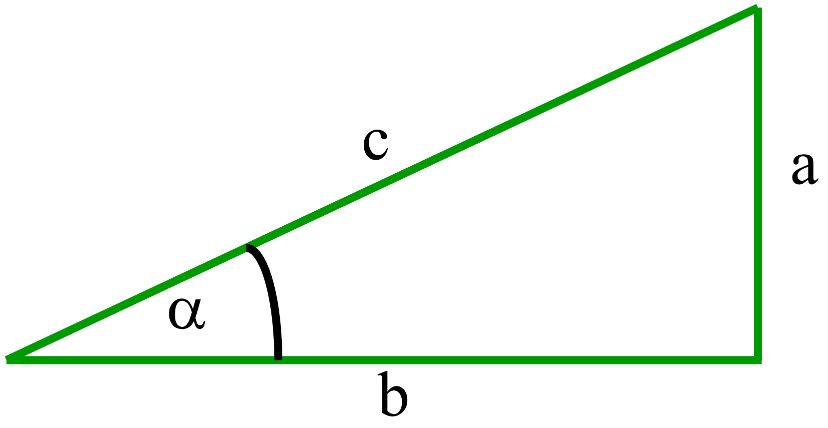






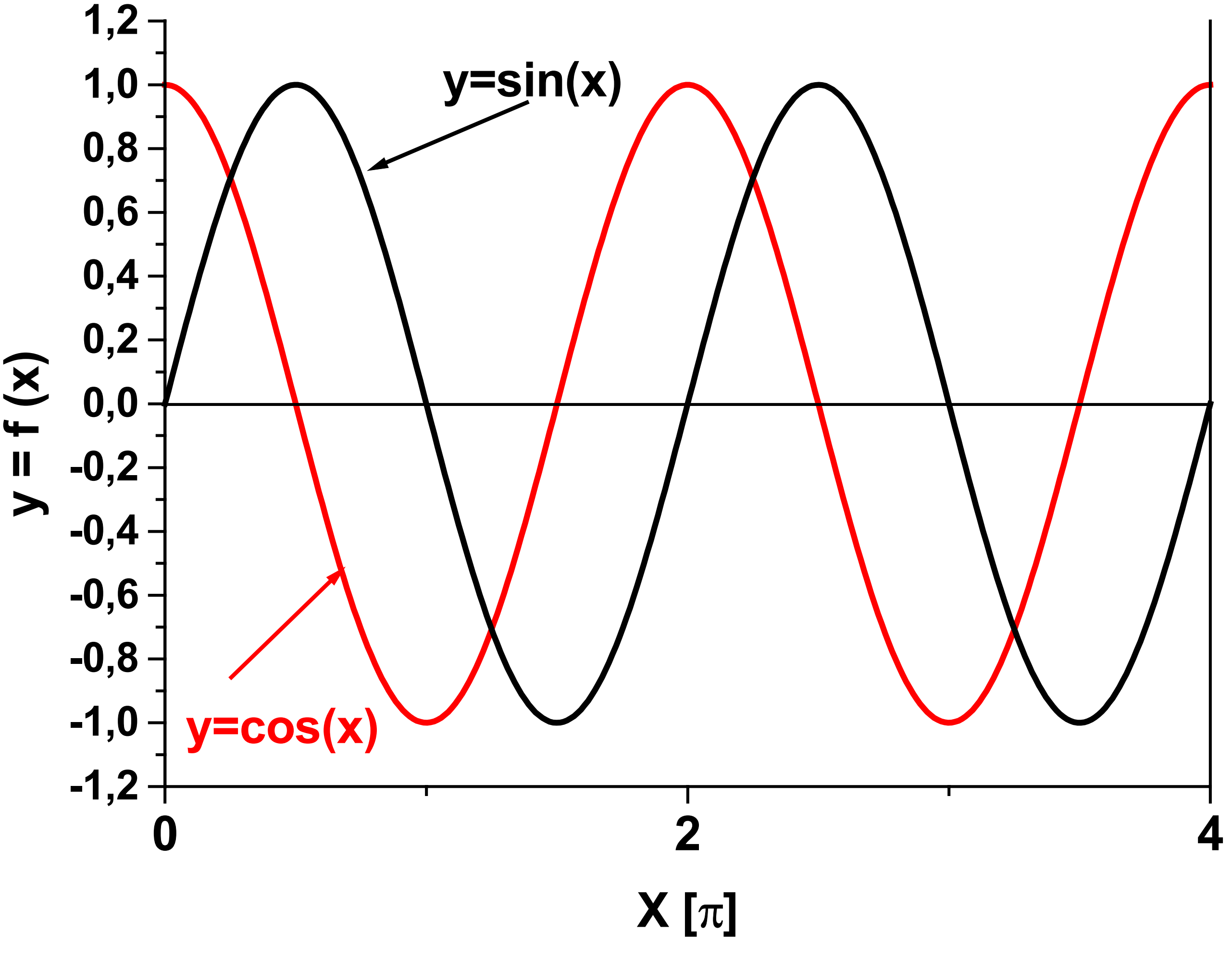
Mathematische Hilfsmittel

Trigonometrische Funktionen



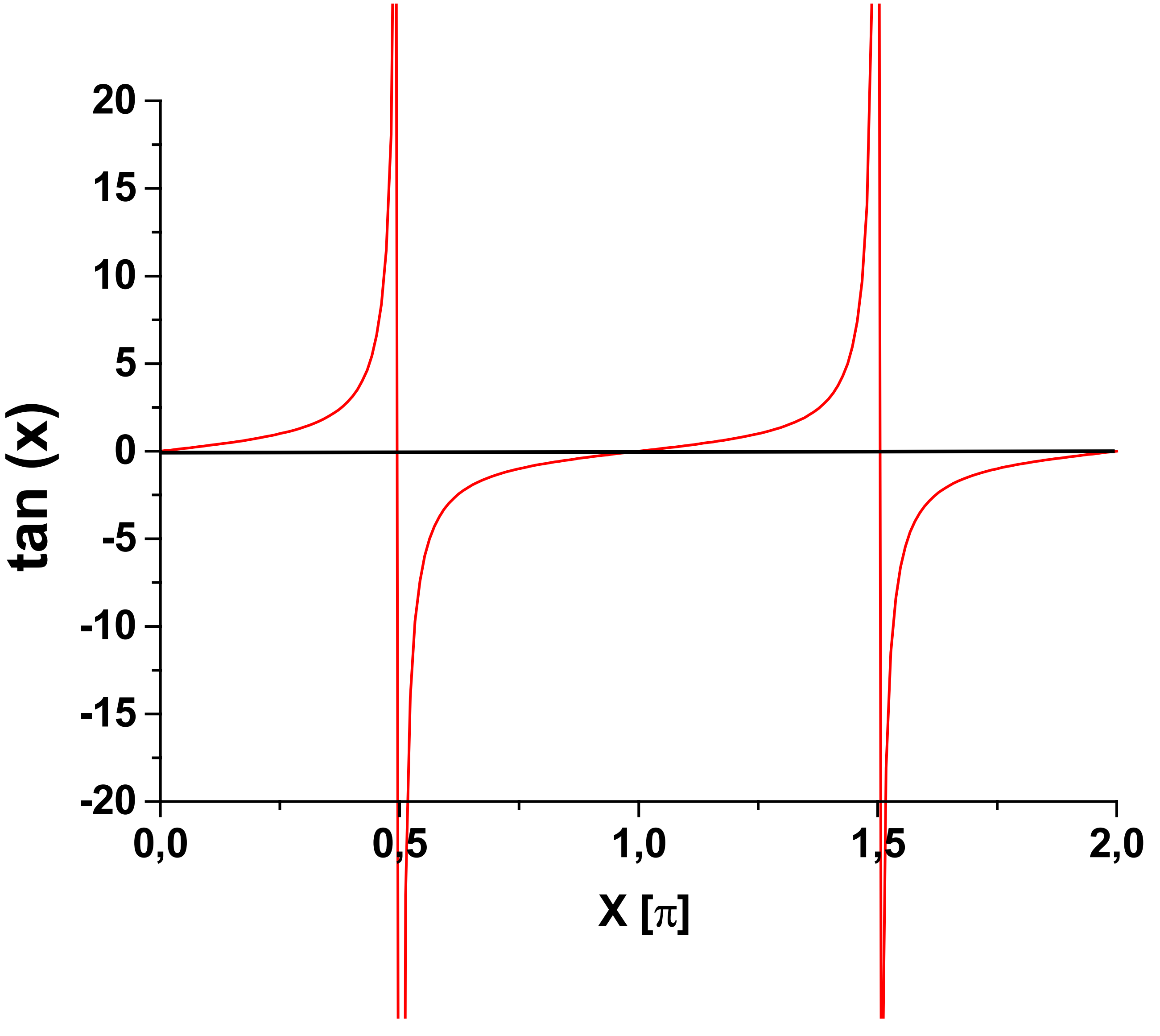
Sinus: $\sin \alpha = a / c$ **Cosinus:** $\cos \alpha = b / c$

Tangens: $\tan \alpha = a / b$ **Cotangens:** $\cot \alpha = b / a$



Mathematische Hilfsmittel

Trigonometrische Funktionen



Mathematische Hilfsmittel

Trigonometrische Funktionen

der Winkel α ist stets in Bogenmaß anzugeben !

$$360^0 \;\hat{=}\; 2\,\pi$$

α	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o
sin α	0	$0{,}5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos α	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$0{,}5$	0
tan α	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

für kleine Winkel α gilt näherungsweise:

$$\sin\alpha = \tan\alpha \approx \alpha$$

Umkehrfunktion zu $\sin(\alpha) = a$:

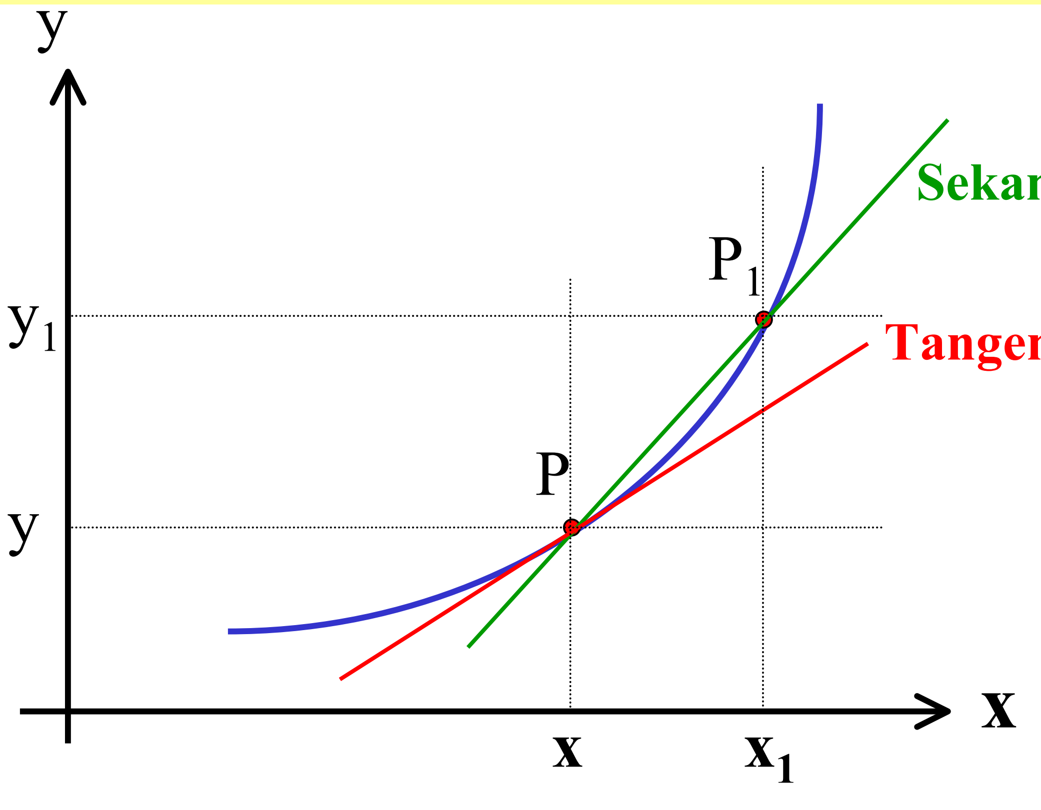
$$\alpha = \text{arc}\sin(a) \qquad \text{oder} \quad = \sin^{-1}(a)$$

Mathematische Hilfsmittel

Dífferential: oder Ableitung

Ist mathematisch aus dem **Differenzenquotienten** hergeleitet, der die **Steigung einer Sekante**, d.h. der Verbindungslinie zweier Punkte einer Kurve (Funktion), bestimmt. Aus dem **Grenzwert**, wenn beide Punkte ineinander übergehen, bildet sich der **Differentialquotient**, der die Steigung der Tangenten in jedem Punkt der Kurve angibt.

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Mathematische Hilfsmittel

Ableitungen bekannter Funktionen:

$$y = a \quad \Rightarrow \quad y' = 0$$

$$y = a \cdot x^n \qquad y' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$y = e^x \qquad y' = e^x$$

$$y = e^{a \cdot x} \qquad y' = a \cdot e^{a \cdot x}$$

$$y = \ln x \qquad y' = 1/x$$

$$y = \sin x \qquad y' = \cos x$$

$$y = \cos(a \cdot x) \qquad y' = -a \cdot \sin(a \cdot x)$$

zu beachten:

Produktregel

$$y = u(x) \cdot v(x) \rightarrow y' = u \cdot v' + v \cdot u'$$

Quotientenregel $$y = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow y' = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

Kettenregel $$y = f(u(x)) \rightarrow y' = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$