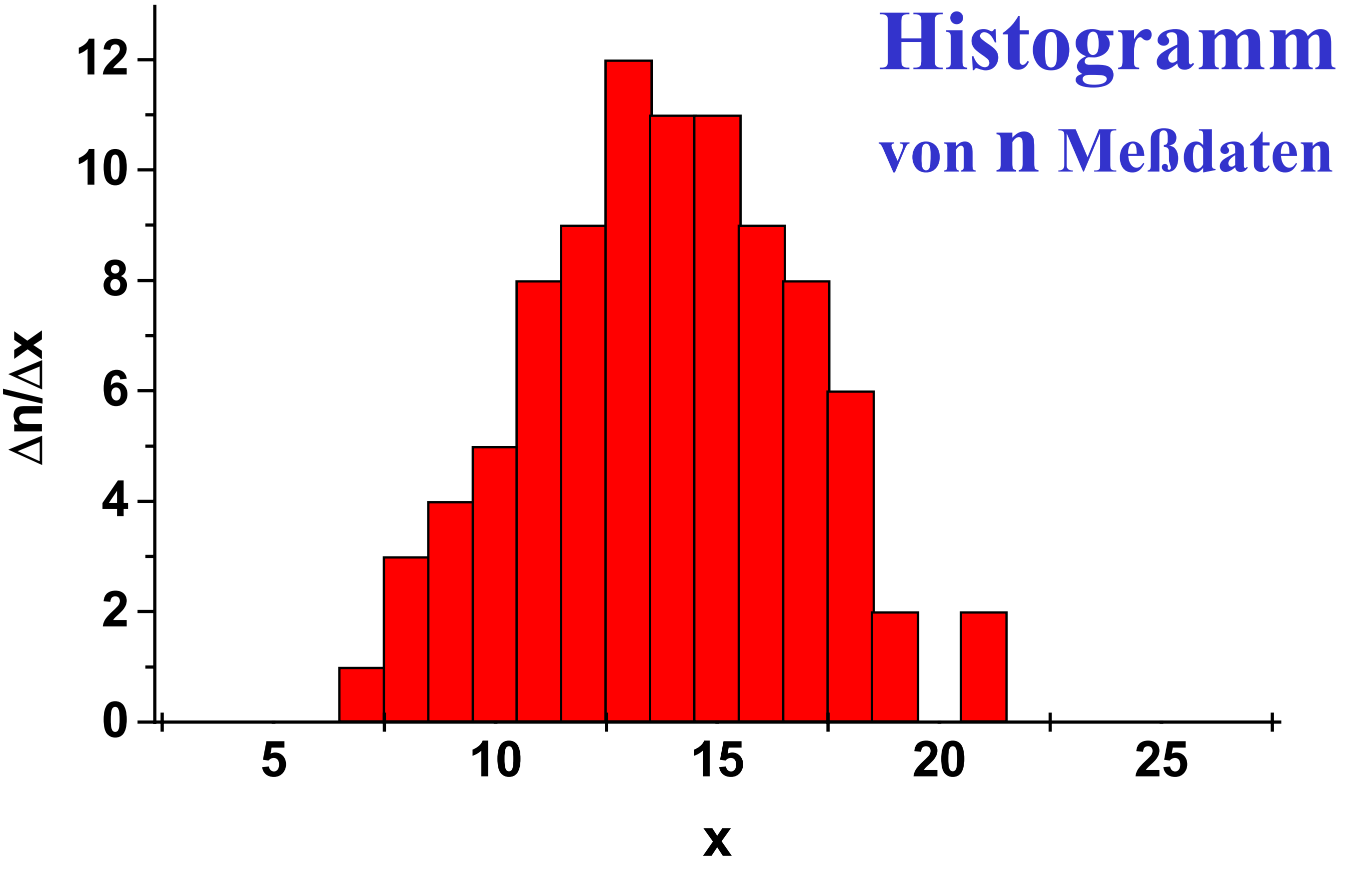
Fehler-Rechnung

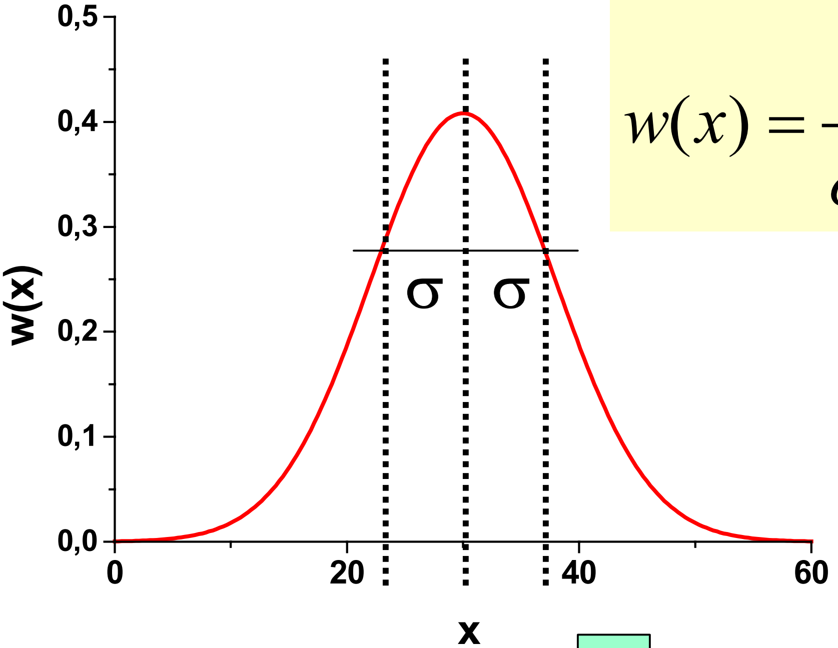
Fehlerquellen: ⇒ Systematische Fehler
Zufällige Fehler



$$w(x) = \frac{\Delta n}{n \cdot \Delta x}$$ **Wahrscheinlichkeitsdichte**

Fehler-Rechnung

Gaußverteilung

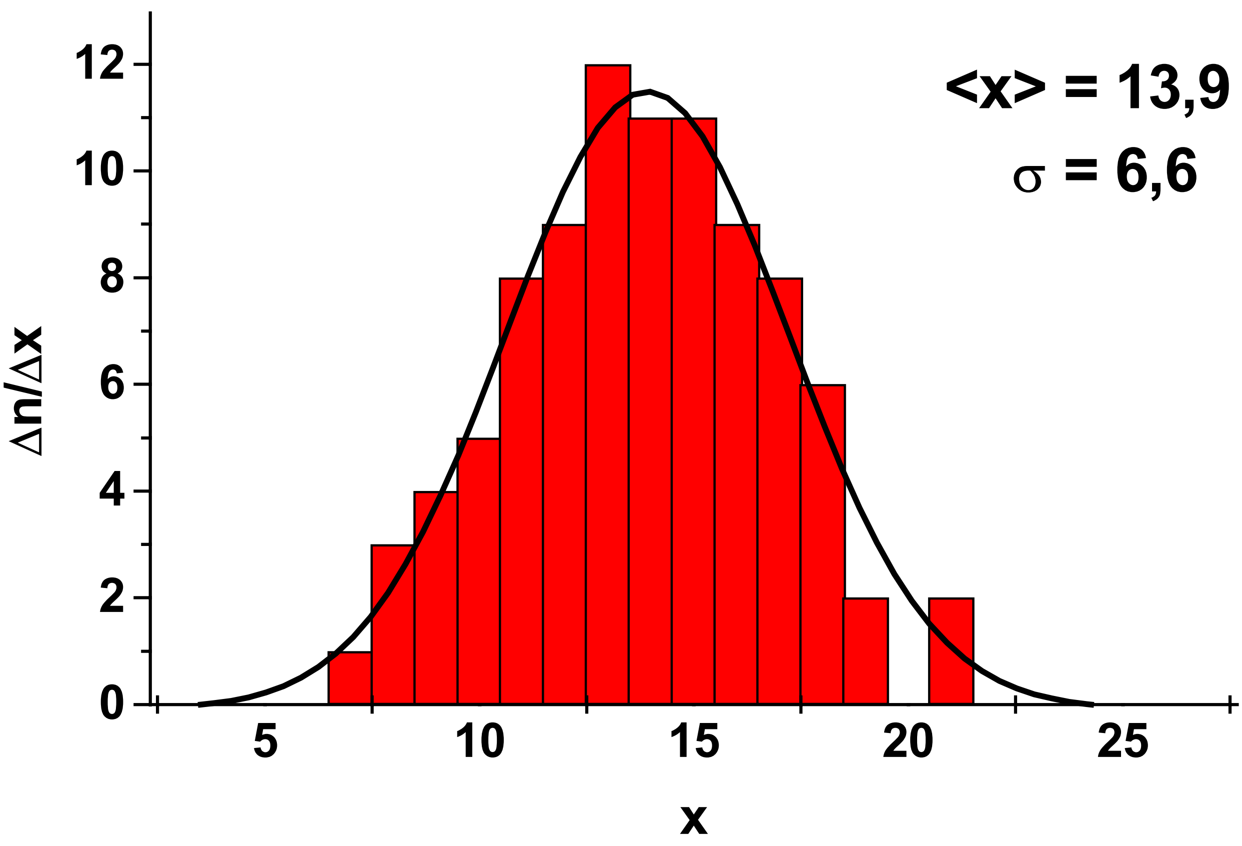


$$w(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

$\bar{x} \pm \sigma : 68{,}3\%$

$\bar{x} \pm 2\sigma : 95{,}4\%$

$\bar{x} \pm 3\sigma : 99{,}7\%$



Fehler-Rechnung

Gaußverteilung

Mittelwert = arithmetisches Mittel

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Varianz: Standardfehler der Einzelmessung

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Standardfehler des Mittelwertes

$$\sigma_m = \pm\sqrt{\frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$x = \bar{x} \pm \sigma_m$$

Fehler-Rechnung

Poissonverteilung

$$w(x) = \frac{\bar{x}^{x}}{x!} e^{-\bar{x}}$$

Nur 1 Parameter !

Für große Werte von $\bar{x}$ wird die Verteilung symmetrischer und wird ähnlich einer Gaußkurve.

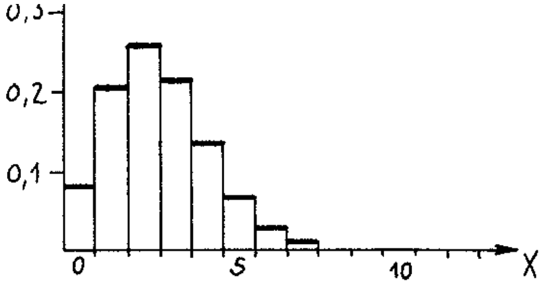


Abb.3a: Poissonverteilung für $\bar{x}$ = 2,5

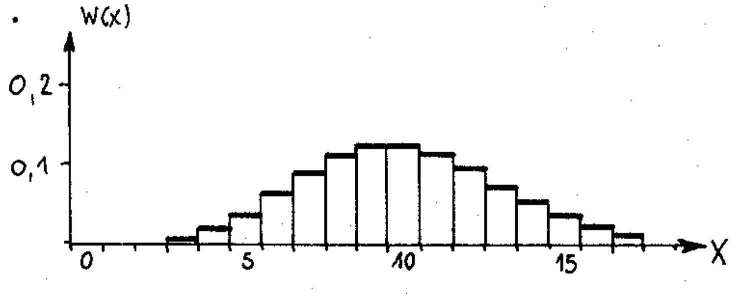


Abb.3b: Poissonverteilung für $\bar{x}$ = 10,0

Es gilt:

$$\sigma = \sqrt{\bar{x}}$$

Fehler in der Zähl-Statistik: N = mittlere Zählrate

Fehler $\sigma = \pm\sqrt{N}$

relative Fehler $\frac{\sigma}{N} = \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$

prozentuale Fehler $\frac{\sigma}{N} \cdot 100\% = \frac{100\%}{\sqrt{N}}$

Fehler-Rechnung

Bestimmung des Fehlers:

Berechnung des mittleren Fehlers aus einer Meßreihe

$$\sigma \;,\; \sigma_m$$

Schätzfehler, bei Einzel-Messung

Skalenteilung
Nonius-Teilung (Schieblehre)
Güteklasse eines Meßgerätes

Systematische Fehler

Angabe des Fehlers einer Meßgröße x [m]:

absolute Fehler: $\pm \Delta x$ [m]

relativer Fehler: $\Delta x / x$ ohne Dimension !

prozentualer Fehler: $\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$

Fehler-Rechnung

Fehlerfortpflanzung

$z = f(a, b, c, \ldots)$ $a \pm \Delta a,\ b \pm \Delta b,\ c \pm \Delta c,$

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial f}{\partial c}\Delta c + \ldots$$

Partielle Ableitung

Beispiel: $z = k\, a^m\, b^n\, c^p$ k=Konstante

$$\frac{\Delta z}{z} = m\frac{\Delta a}{a} + n\frac{\Delta b}{b} + p\frac{\Delta c}{c}$$

Größtfehler

z: Summe oder Differenz $z = k_1\, a \pm k_2\, b \pm$

$$\Delta z = |k_1 \Delta a| + |k_2 \Delta b| + \ldots$$

z: Potenzprodukt $z = k_1\, a^m\, b^n\, c^p$

$$\frac{\Delta z}{z} = \left|m\frac{\Delta a}{a}\right| + \left|n\frac{\Delta b}{b}\right| + \left|p\frac{\Delta c}{c}\right|$$

Fehlerbetrachtungen

Absoluter Fehler: Δz Relativer Fehler: $\Delta z / z$

Fehlerfortpflanzung:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial f}{\partial b}\Delta b + \ldots$$

Meßgröße berechnet sich als Potenzprodukt:

$$\frac{\Delta z}{z} = \sum \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Meßgröße berechnet sich als Summe/Differenz:

$$\Delta z = \sum \Delta x_i$$

Fehler-Rechnung

Beispiel: Messung mit Schieblehre

$$\mathbf{d = 0{,}5\ mm \quad \Delta d = 0{,}1\ mm}$$

$$d = 0{,}5 \pm 0{,}1\ \mathrm{mm}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$$

$$\frac{\Delta d}{d} \cdot 100\% = 20\%$$

Fehler auf maximal **2 Stellen** angeben !

Stelligkeit:	3,5	$\rightarrow$	2-stellig
	3,500	$\rightarrow$	4-stellig
	$0{,}0350\ 10^2$	$\rightarrow$	3-stellig
Dezimalstellen:	3,5	$\rightarrow$	1 Dez.Stelle
	3,500	$\rightarrow$	3 Dez.Stellen